第十一章　矩陣

1. 矩陣的加減法：設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$，$B = [b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$，$A-B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$。
2. 矩陣的係數積：若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 為一 m×n 階矩陣，而 r 是任意實數，則 $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$， 此時稱 rA 是 A 係數積。
3. 矩陣運算性質
   (1) $A+B=B+A$
   (2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
   (3) A 為 m×n 階矩陣，若存在一個 m×n 階矩陣 O，使得 $A+O = O+A = A$，O 為 m × n 階矩陣之加法的單位元素，$O=[0]_{m\times n}$ 稱 m×n 階零矩陣。
   (4) A 為 m×n 階矩陣，若存在一個 m×n 階矩陣 $-A$，使得 $A+(-A) = (-A)+A=O$，
   $-A$ 為 A 的 m × n 階矩陣之加法反元素，即 $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$。
   (5) 設 A、B 為同階的矩陣，r, s 為實數，則下列性質成立：
   (a) $r(A+B) = rA+rB$
   (b) $(r+s)A = rA+sA$
   (c) $(rs)A = r(sA)$
4. 矩陣乘積：
   (1) 若 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，B 是一個 $n\times p$ 階矩陣，則 A 和 B 的乘積 $AB=C$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，而且 C 中的每個 (i,j) 元都等於 A 的第 i 列中各元（共有 n 個元）與 B 的第 j 行中各對應元（也有 n 個元）之乘積的和，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

   (2) $AB\neq BA$
2. ***n*** 階單位方陣，以 I_n 表之

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 二階反方陣

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且行列式 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

(1) 當 $\det(A)\neq 0$ 時，A 有乘法反方陣 A^{-1}，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(2) 當 $\det(A)=0$ 時，A 沒有反方陣

【例題 1】

已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$，其中 $a_{ij}=2i+j$，求矩陣 A。

解答 $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

【例題 2】

已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，求 (1) $3A-2B$ (2) AC (3) CA (4) C^{-1}

(5) 若 $3(X+A)=X+5B$，求矩陣 X (6) 若 $CY=D$，求矩陣 Y。

解答 (1) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \\ -13 & 15 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$ (3) 不存在 (4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 14 & -12 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

【例題 3】

已知方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & x\\1 & 2\end{bmatrix}$沒有反方陣，求實數 x 的值

$\boxed{\text{解答}}$ 6

【例題 4】

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}$，求

(1)若 $3X+4B=2A$，則 $X=$____________ .

(2)若 $A^{-1}CA=B$，則 $C=$____________ .

(3)若 $A=\begin{bmatrix}a+b & 3c+d\\2a-3b & c-d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$____________ .

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3} & -\frac{8}{3}\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\-\frac{3}{2} & \frac{11}{2}\end{bmatrix}$　(3) 0

[練習]

1. 設 $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$，且 $a_{ij}=i-j$，求 $A=$____________ .

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 4\\-4 & 0\end{bmatrix}$，且 $3(X+A-2B)=X+A$，求矩陣 X

3. $A=\begin{bmatrix}9 & -7\\5 & -4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 5\\2 & 3\end{bmatrix}$，試求(1) $2A+B$　(2) AB　(3) BA　(4) A^{-1}　(5) $AX=B$，求矩陣 X

4. 已知方陣 $A=\begin{bmatrix} x & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$沒有反方陣，求實數 x 的值

解答 1.$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 2.$\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$ 3. (1)$\begin{bmatrix} 19 & -9 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} -5 & 24 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix} 34 & -27 \\ 33 & -26 \end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix} -10 & -1 \\ -13 & -2 \end{bmatrix}$ 4. -10

習　題

1. 已知二次多項式 $f(x)$滿足 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(4)=10$，求 $f(x)$.

2. 已知 $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$，$B=[b_{ij}]_{3\times 2}$ 都是 3×2 階矩陣，且 $a_{ij}=i+j$，$b_{ij}=3i-2j$，求 $A+B$.

3. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$，且 $3A+2X=5B$，則方陣 $X=$____________ .

4. 請問下列哪一個選項中的矩陣乘積等於$\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$? (1)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. 【101 指考乙】

5. .設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，若 $AX=B$，則二階方陣 $X=$____________ .

6. 設 $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$，若矩陣 X 與 Y 滿足 $X+2Y=A$，$2X+Y=B$，則

   (1) $X=$____________，(2) $Y=$____________ .

7. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. 若 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，則$(a, b, c, d)=$

   ________ .

8. <u>小惠</u>有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住 . 有一天，<u>志明</u>向她借用這台自行車，她答應借用，但只告訴<u>志明</u>號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

   $$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

   <u>志明</u>卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車 . 請你（妳）幫忙<u>志明</u>求出這副號碼鎖的正確密碼 . 【99 指考乙】

解答：

1. $f(x)=x^2-2x+2$ 2.$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$ 3.$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ 4. 5 5. $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ 6. (1)$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

7. $(4, -3, -9, 7)$ 8. 7321