

第三章 直線與圓

[直線的斜率]

1. 定義：

直線 L 上相異兩點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 則：

(1) 若 L 非鉛直線 ($x_1 \neq x_2$), 則 L 的斜率 $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

(2) 若 L 為鉛直線 ($x_1 = x_2$), 則 L 沒有斜率.

(3) 若 L 為水平線 ($y_1 = y_2$), 則 L 的斜率 $m = 0$.

【註】(1) 直線由左下到右上傾斜, 斜率為正; 直線由左上到右下傾斜, 斜率為負.

(2) 直線愈陡, $|m|$ 愈大.

2. 若直線 $y = ax + b$, 則斜率 $m = a$.

3. 若直線 $ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, 則斜率 $m = -\frac{a}{b}$.

【例題 1】

若 $A(1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(1, 3)$, $D(5, 2)$ 則 \overline{AB} 的斜率 $m_{\overline{AB}} =$ _____, \overline{AC} 的斜率 $m_{\overline{AC}} =$ _____, \overline{AD}

的斜率 $m_{\overline{AD}} =$ _____.

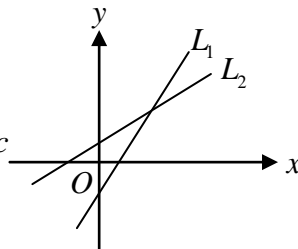
解答 1; 沒有斜率; 0

【例題 2】

如圖, 兩直線 L_1 , L_2 之方程式分別為 $L_1: x + ay + b = 0$, $L_2: x + cy + d = 0$

試問下列哪些選項是正確的? (1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $d > 0$ (5) $a > c$

解答 (4)(5)



[直線方程式]

1. 點斜式：過點 $P(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線為 $L: y - y_0 = m(x - x_0)$

2. 斜截式：斜率為 m 且 y 截距 b 的直線為 $L: y = mx + b$

3. 截距式： x 截距 a , y 截距 b 的直線為 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

【註】當直線與 x 軸相交於 $(a, 0)$ 時, 稱 a 為該直線的 x 截距; 與 y 軸相交於 $(0, b)$ 時, 稱 b 為該直線的 y 截距.

【例題 3】

- (1) 過點 $P(1,2)$ 且斜率為 3 的直線方程式為_____。
- (2) 斜率為 2 且與 y 軸相交於點 $(0,-3)$ 的直線方程式為_____。
- (3) 求過 $P(2,0)$, $Q(0,-3)$ 的直線方程式為_____。

解答 (1) $3x - y - 1 = 0$ (2) $2x - y - 3 = 0$ (3) $3x - 2y = 6$

[練習]

1. 通過 $(-1,2)$, $(0,3)$ 兩點的直線為_____。
2. 過 $2x + y - 3 = 0$ 與 $3x - 2y - 1 = 0$ 的交點, 且斜率為 $\frac{2}{3}$ 的直線為_____。

解答 1. $x - y + 3 = 0$ 2. $2x - 3y + 1 = 0$

[直線的平行與垂直]

已知 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 , m_2 , 則:

- (1) 若 $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
- (2) 若 $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

【例題 4】

設 $A(2,1)$, $B(3,5)$, $C(0,-1)$, $D(2,a)$,

- (1) 若 $\overline{AB} // \overline{CD}$, 則 $a =$ _____。
- (2) 若 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, 則 $a =$ _____。
- (3) 若 B, C, D 共線, 則 $a =$ _____。

解答 (1) 7 (2) $-\frac{3}{2}$ (3) 3

【例題 5】

兩直線 $L_1: x-2y+6=0$, $L_2: x+y-5=0$ 與點 $P(1,3)$,

- (1) 過 P 平行 L_1 之直線方程式為_____
- (2) 過 P 垂直 L_1 之直線方程式為_____
- (3) 過 L_1 與 L_2 交點且通過 P 點之直線方程式為_____

解答 (1) $x-2y+5=0$ (2) $2x+y=5$ (3) $2x-y+1=0$

[練習]

已知直線 $L: 3x-2y+5=0$,

- (1) 求過原點且與 L 平行之直線方程式.
- (2) 求過原點且與 L 垂直之直線方程式.

解答 (1) $3x-2y=0$ (2) $2x+3y=0$

[點與直線的平移]

設 h, k 為正數, 直線 $L: ax+by+c=0$

1. 點的平移

- (1) 點 (a,b) 往右平移 h 個單位, 得點 $(a+h,b)$; 點 (a,b) 往左平移 h 個單位, 得點 $(a-h,b)$.
- (2) 點 (a,b) 往上平移 k 個單位, 得點 $(a,b+k)$; 點 (a,b) 往下平移 h 個單位, 得點 $(a,b-k)$.

2. 直線的平移

- (1) 將 L 往右平移 h 個單位, 得直線 $a(x-h)+by+c=0$.
- (2) 將 L 往左平移 h 個單位, 得直線 $a(x+h)+by+c=0$.
- (3) 將 L 往上平移 k 個單位, 得直線 $ax+b(y-k)+c=0$.
- (4) 將 L 往下平移 k 個單位, 得直線 $ax+b(y+k)+c=0$.

【例題 6】

將一直線 $L: 2x+3y+7=0$ 往左平移 1 單位, 再往上平移 4 單位, 求平移後的直線的直線方程式為

解答 $2x+3y-3=0$

[練習]

將直線 L 往左平移 4 單位，再往上平移 3 單位後，所得的直線為 $3x - 4y = 0$ ，求直線 L 的方程式。

解答 $3x - 4y - 24 = 0$

[點到直線距離]

(1). 點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(2). 兩平行線 $L_1: ax + by + c_1 = 0$ 與 $L_2: ax + by + c_2 = 0$ 的距離為 $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

【例題 11】

(1) 求點 $P(2, 3)$ 到直線 $4x - 3y + 11 = 0$ 的距離為_____。

(2) 兩平行直線 $L_1: 3x - 4y + 13 = 0$ 與 $L_2: 6x - 8y - 4 = 0$ 的距離為_____。

解答 (1) 2 (2) 3

[練習]

(1) 求 $P(-2, 1)$ 到直線 $L: 5x + 12y + 11 = 0$ 的距離為_____。

(2) 兩平行直線 $L_1: 4x + 3y + 10 = 0$ 與 $L_2: 4x + 3y - 4 = 0$ _____。

解答 (1) 1 (2) $\frac{14}{5}$

[二元一次不等式]

1. 二元一次不等式：

(1) 形如 $ax + by + c > 0$ ， $ax + by + c \geq 0$ ， $ax + by + c < 0$ ， $ax + by + c \leq 0$ 的不等式，稱為二元一次不等式。

(2) $ax + by + c = 0$ 的圖形是一直線 L 。

$ax + by + c > 0$ 或 $ax + by + c < 0$ 的圖形表示 L 某一邊的半平面(不含 L)。

$ax + by + c \geq 0$ 或 $ax + by + c \leq 0$ 的圖形表示 L 與 L 某一邊的半平面(含 L)。

2. 設直線 L 的方程式為 $ax + by + c = 0$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 為兩相異點

(1) 若 A, B 在直線 L 的同側，則 $(a_1x + b_1y + c)(a_2x + b_2y + c) > 0$ 。

(2) 若 A, B 在直線 L 的異側，則 $(a_1x + b_1y + c)(a_2x + b_2y + c) < 0$ 。

(3) 若 \overline{AB} 與 L 相交，則 $(a_1x + b_1y + c)(a_2x + b_2y + c) \leq 0$ 。

【例題 7】

試求滿足聯立不等式 $\begin{cases} 3x-2y \geq 6 \\ x+y \leq 7 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的整數解 (x, y) 共有_____組.

解答 13

【例題 8】

座標平面上有一直線 $3x-4y+k=0$ 且此直線將平面分成左右兩半平面，若點 $(6, -1)$ 在直線的右半平面且點 $(1, 3)$ 在直線的左半平面，則 k 的範圍為_____.

解答 $-22 < k < 9$

[練習]

設 $A(1, 3)$, $B(-3, 2)$, 直線 $L: 2x + y - k = 0$,

(1) 若 A, B 在直線 L 的同側, 則實數 k 的範圍為_____.

(2) 若直線 L 與 \overline{AB} 相交, 則 k 的範圍為_____.

解答 (1) $k > 5$ 或 $k < -4$ (2) $-4 \leq k \leq 5$

[圓的方程式]

- 標準式：圓心 $O(h, k)$, 半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
- 直徑式：以點 (a, b) 與 (c, d) 為直徑兩個端點的圓方程式為 $(x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0$.
- 一般式：圓的方程式都可表示成 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的形式.

【註】並非所有形如 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的方程式都是圓.

4. 圓的判別：令 $D = d^2 + e^2 - 4f$ ，則

- (1) 當 $D > 0$ ，方程式代表一圓，圓心為 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$ ，半徑為 $\frac{\sqrt{D}}{2}$ 。
- (2) 當 $D = 0$ ，方程式代表一點 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$ 。
- (3) 當 $D < 0$ ，方程式沒有圖形。

【例題 11】

- (1) 以 $A(1, -2)$ ， $B(3, 4)$ 為直徑兩個端點的圓方程式為_____。
- (2) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ 之圓心為_____，半徑為_____。
- (3) 設 $A(0, 0)$ ， $B(0, 4)$ ， $C(3, 3)$ ，則 $\triangle ABC$ 外接圓的方程式為_____。

解答 (1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ (2) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}); \sqrt{5}$ (3) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

[練習]

- (1) 圓心 $(1, -2)$ ，半徑為 3 的圓方程式為_____。
- (2) 設 $A(0, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，則滿足 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 之 P 點的軌跡方程式為_____。

解答 (1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ (2) $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

[圓與直線的關係]

1. 代數觀點：將直線與圓方程式解聯立，整理可得到一元二次方程式，令判別式為 D ，則
 - (1) 當 $D > 0$ ，直線與圓相交於相異兩點(相割)
 - (2) 當 $D = 0$ ，直線與圓相交於一點(相切)
 - (3) 當 $D < 0$ ，直線與圓不相交(相離)

2. 幾何觀點：在平面上有一直線 L ，及圓 C 的圓心為 O ，半徑為 r ，則

- (1) 若 $d(O, L) < r$ ，直線與圓相交於相異兩點(相割)
- (2) 若 $d(O, L) = r$ ，直線與圓相交於一點(相切)
- (3) 若 $d(O, L) > r$ ，直線與圓不相交(相離)

【註】 $d(O, L)$ 表圓心 O 到直線 L 的距離。

【例題 12】

若圓 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = a$ 與直線 $3x-4y=2$ 相切，則實數 $a =$ _____。

解答 16

【例題 13】

若圓 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 與直線 $3x-4y=2$ 相交於 A, B 兩點，則弦長 $\overline{AB} =$ _____。

解答 6

[練習]

1. 若圓 $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + k = 0$ 與 y 軸相切，則 $k =$ _____
2. 求直線 $L: 3x + y = 7$ 與圓 $C: (x+1)^2 + y^2 = 20$ 的交點坐標為 _____。

解答 1.3 2. (1, 4), (3, -2)

[圓的切線方程式]

1. 過圓上一點求切線(只有一條)：

設 $P(x_0, y_0)$ 在圓 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 上，則過 P 點的切線方程式為

$$(x_0 - h)(x - h) + (y_0 - k)(y - k) = r^2$$

2. 過圓外一點求切線(必有兩條)：

- (1) 利用點斜式假設切線方程式
- (2) 再利用圓心到切線的距離等於半徑求出斜率

【註】當斜率只有一解時，另一切線為鉛直線

【例題 14】

(1) 求過圓 $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 3 = 0$ 上一點 $(2, -3)$ 的切線方程式為_____

(2) 求過 $P(2, 3)$ 且與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 相切之直線方程式為_____

解答 (1) $x + 4y + 10 = 0$ (2) $x = 2$ 或 $5x - 12y + 26 = 0$

【例題 15】

求斜率為 3 且與圓 $x^2 + y^2 = 10$ 相切之直線方程式為_____

解答 $y = 3x \pm 10$

[練習]

1. 求過圓 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ 上一點 $(3, 4)$ 的切線方程式為_____

2. 求過 $P(-1, 2)$ 且與圓 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ 相切之直線方程式為_____

解答 (1) $x + y = 7$ (2) $x - y + 3 = 0, x + y - 1 = 0$

習 題

- 坐標平面上有兩條平行直線，它們的 x 截距相差 20， y 截距相差 15，則這兩條平行直線的距離為_____。
- 坐標平面上， $A(1, 5)$ ， $B(4, -5)$ ，若直線 $L: y = mx + 2m - 3$ 恆與 \overline{AB} 相交，則 m 的範圍為_____。
- 求點 $P(3, 1)$ 關於直線 $L: x + 2y = 0$ 之對稱點 Q 為_____。
- 在坐標平面上，一道光線通過點 $A(0, 2)$ ，射向 x 軸上的 P 點，反射後通過點 $B(8, 2)$ ，則 P 點坐標為_____。

5. 設 $A(4,5)$, $B(-2,2)$, $C(2,-2)$ 為坐標平面上三點,
- (1) 試以聯立不等式表示 $\triangle ABC$ 的內部區域為_____ (含邊界).
- (2) 若 $P(k, 2k-3)$ 為 $\triangle ABC$ 內部一點, 求實數 k 的範圍為_____.
6. 將一直線 $L: 2x+ay+5=0$ 往左平移 2 單位, 再往上平移 1 單位得直線 $2x+3y+b=0$, 則 $a+b=$ _____.
7. 已知點 $P(1,-2)$ 到直線 $L: 12x-5y+k=0$ 的距離為 2, 求 k 的值为_____.
8. 若圓通過 $A(0,1)$ 及 $B(4,-3)$, 且其圓心在直線 $x+2y=0$ 上, 求此圓的圓心為_____, 半徑為_____.
9. 坐標平面上的圓 $C: (x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有_____個點與原點的距離正好是整數值.
10. $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓, 試問下列哪些選項是正確的?
- (1) Γ 的圓心坐標為 $(5,0)$
- (2) Γ 上的點與直線 $L: 3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4
- (3) 直線 $L_1: 3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切
- (4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x+4y=0$ 的距離等於 2
- (5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x+4y-5=0$ 的距離等於 2
11. 過 $P(1,2)$ 作圓 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 之兩條切線, 切點為 Q, R , 則 $\triangle PQR$ 之外接圓方程式為_____.
12. 在坐標平面上, 一圓通過點 $(-2,7)$, 且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$, 若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, 則 $(a,b,c)=$ _____.
13. 過 $P(1,2)$ 向圓 $C: x^2+y^2=2$ 作切線, 切點為 A, B , 則 $\overline{PA}=$ _____.

解答：

$$1.12 \quad 2. -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{8}{3} \quad 3. (1,-3) \quad 4. (4,0) \quad 5. (1) \begin{cases} x-2y+6 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \\ 7x-2y-18 \leq 0 \end{cases} \quad (2) 1 \leq k \leq 4 \quad 6. 9$$

$$7. 4 \text{ 或 } -48 \quad 8. (2,-1); 2\sqrt{2} \quad 9. 12 \quad 10. 124 \quad 11. x^2+y^2-3x-y=0 \quad 12. (10,-6,9)$$

$$13. \sqrt{3}$$