

第二章 指數與對數

[指數]

1. a^n 讀作「 a 的 n 次方」，其中 a 稱為底數， n 稱為指數

2. 設 a 是實數， $a \neq 0$ ， n 是正整數，定義(1) $a^0 = 1$ (2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3. 設 $a > 0$ ， n 是正整數， m 是整數，定義(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (2) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. 指數律：設 $a > 0$ ， $b > 0$ ， m ， n 為實數，則

$$(1) a^m a^n = a^{m+n} \quad (2) (a^m)^n = a^{mn} \quad (3) a^n b^n = (ab)^n$$

【例題 1】(指數)

利用指數律求下列各式的值：

$$(1) 2^3 \times 2^5 \quad (2) (\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^5 \quad (3) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)^3$$

解答 (1) 256 (2) 81 (3) $\frac{1}{64}$

【例題 2】

$$(1) (\sqrt{2} + \sqrt{3})^0 \quad (2) (-2)^5 \times (-2)^{-2} \quad (3) \frac{3^2}{3^5} \quad (4) (\sqrt{5} - \sqrt{2})^{-3} \times (\sqrt{5} + \sqrt{2})^{-3}$$

解答 (1) 1 (2) -8 (3) $\frac{1}{27}$ (4) $\frac{1}{27}$

【例題 3】

求下列各式的值：

$$(1) \sqrt[5]{9\sqrt{3}} \quad (2) \sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{3^8} \quad (3) \frac{2^{2.4} \times 2^{3.8}}{4^{1.1}} \quad (4) \left(\frac{9}{16} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

解答 (1) $\sqrt{3}$ (2) 27 (3) 16 (4) $\frac{64}{27}$

[練習]

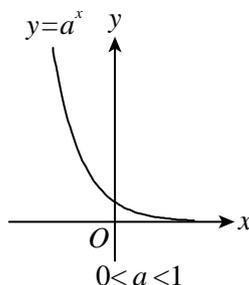
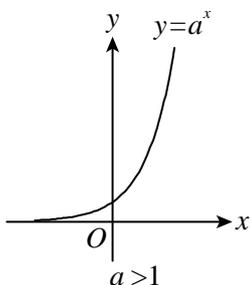
1. (1) $2^{18} = (4^x)^3$, 則 $x = ?$ (2) 若 $3^2 \times 9^2 = 3^x$, 則 $x = ?$
 (3) 若 $(-2)^8 \times 5^4 = a^4$, 則 $a = ?$

2. 求下列各式的值：(1) $\sqrt[3]{2^7} \times \sqrt[3]{2^{10}}$ (2) $\frac{3^{1.3} \times 3^{2.4}}{3^{-0.3}}$ (3) $\left(\frac{0.8}{2700}\right)^{\frac{-2}{3}}$

解答 1.(1) 3 (2) 6 (3) 20 2.(1) 16 (2) 81 (3) 225

[指數函數]

1. 設 $a > 0$, $a \neq 1$, x 是任意實數, 我們將函數 $f(x) = a^x$ 稱為以 a 為底數的指數函數。
 2. 設 $a > 0$, $a \neq 1$, 指數函數 $y = a^x$ 的圖形如下：



3. 指數函數 $y = a^x$ 之圖形的特色：

- (1) 圖形都在 x 軸上方。也就是對任意實數 x , a^x 的值恆大於 0。
 (2) 圖形都通過點 $(0, 1)$ 。這是因為 $a^0 = 1$ 。
 (3) 當 $a > 1$ 時, 圖形由左向右逐漸上升, 即當 $\alpha < \beta$ 時, $a^\alpha < a^\beta$ 。

我們稱這樣的函數為嚴格遞增函數。

當 $0 < a < 1$ 時, 圖形由左向右逐漸下降, 即當 $\alpha < \beta$ 時, $a^\alpha > a^\beta$ 。

我們稱這樣的函數為嚴格遞減函數

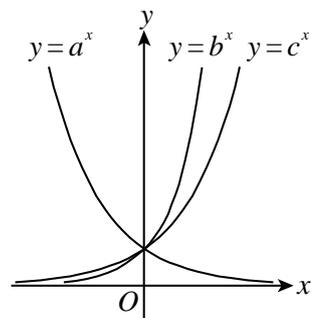
- (4) 函數 $y = a^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸

【例題 4】

右圖為函數 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 的圖形

- (1) $a > 1$ (2) $b > 1$ (3) $c > 1$ (4) $a > b$ (5) $b > c$.

解答 (2)(3)(5)



【例題 5】

解下列方程式：

(1) $(\sqrt{3})^{3x+1} = 27\sqrt{3}$. (2) $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$

解答 (1) $x = 2$ (2) $x = 1$

【例題 6】

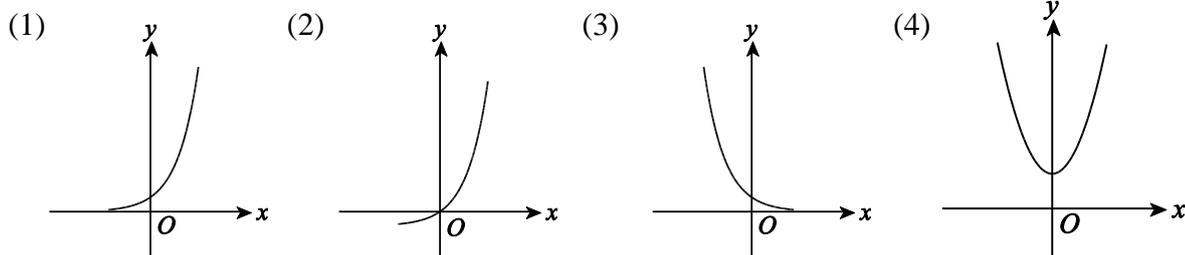
(1) 已知 $(0.7)^{x^2} > (0.49)^x$ ，求 x 的範圍

(2) 解不等式 $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$

解答 (1) $0 < x < 2$ (2) $x > 2$

[練習]

1. 設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則下列圖形中，哪些可能是指數函數 $y = a^x$ 的部分圖形？



2. 解下列方程式：(1) $3^{3x} = 3^{x+2}$ (2) $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$ (3) $6^x - 2^x - 4 \cdot 3^x + 4 = 0$

3. 解下列不等式：(1) $\frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < 2$ (2) $2^{x+1} + 2^{2-x} - 6 < 0$

解答 1. 1, 3 2(1) $x = 1$ (2) $x = -3$ 或 2 (3) $x = 0$ 或 2 3.(1) $-\frac{1}{2} < x < 1$ (2) $0 < x < 1$

[常用對數]

1. 科學記號與有效數字:

每一個正實數 a 都可以表為 $a = b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 為整數，並稱 $b \times 10^n$ 為 a 的科學記號。

將正數以“ k 位有效數字表示”是指先將它寫成科學記號數字，再將它的係數四捨五入約至 $k-1$ 位小數，然後以普通記號(整數、小數)或科學記號呈現其數值。

2. 常用對數:

設 $b > 0$ ，當實數 a 滿足 $b = 10^a$ 時，這個指數的值 $a = \log b$ ，即 $b = 10^{\log b}$ ，並稱 $\log b$ 為 b 的常用對數。

【例題 9】

設 $a = \log 11$ ， $b = \log 7$ ，則

(1) $1000^a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2) $10^{a+2b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答 (1)1331 (2)539

【例題 10】

3^{105} 乘開後是①_____位數，又其個位數字為②_____。(已知 $\log 3 \approx 0.4771$)

解答 ①51 ②3

[練習]

1. 將下列各數化成科學記號：

(1)1567000 (2)0.0001235 (3)1000

2. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

(1) 將 7^{40} 乘開後是幾位數？

(2) 將 $\left(\frac{2}{7}\right)^{100}$ 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

3. 等比級數 $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$ 的和是幾位數? 最高位數字為何? ($\log 2 \approx 0.3010$)

解答 1. (1) 1.567×10^6 (2) 1.235×10^{-4} (3) 1×10^3 2. (1) 34 位數 (2) 第 55 位 3. (1) 20 (2) 1.

[對數]

1. 當 $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ 時, 方程式 $a^x = b$ 有唯一實數解 $x = \log_a b$ 。

$\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時 b 的對數」, 其中 b 稱為真數, a 稱為底數。

2. 對數的運算性質:

換底公式: 設 a, b 均 > 0 , 且 $a \neq 1$, 則 $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

對數律: 設 x, y 均 > 0 , r 為實數, 則

$$(1) \log xy = \log x + \log y \quad (2) \log \frac{x}{y} = \log x - \log y .$$

$$(3) \log x^r = r \log x$$

【例題 11】

求下列各式中 x 的值:

$$(1) \log_x 81 = -2 \quad (2) \log_x \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \quad (3) \log_{25} x = -1.5 \quad (4) \log_x 9\sqrt{3} = 5$$

解答 (1) $x = \frac{1}{9}$ (2) $x = 5$ (3) $x = \frac{1}{125}$ (4) $x = \sqrt{3}$

【例題 12】

求下列各式的值:

$$(1) \log_6 4 + \log_6 9 \quad (2) \log_2 20 - \log_2 5 \quad (3) 2\log_{10} 5 + 3\log_{10} 4 - 4\log_{10} 2$$

解答 (1) 2 (2) 2 (3) 2

[練習]

1. 求下列各對數的值

$$(1) \log_3 243 \quad (2) \log_{27} 81 \quad (3) \log_8 0.25 \quad (4) \log_{\frac{4}{3}} \frac{3}{4} \quad (5) \log_{25} \frac{1}{5}$$

2. 求下列各式之值：

$$(1) \log_2 24 + \log_2 18 - 3\log_2 3 \quad (2) \frac{1}{3}\log_2 \frac{27}{8} - \log_2 24 + 3\log_2 \sqrt[3]{2}$$

$$(3) 2\log_{30} 18 + 2\log_{\sqrt{30}} 40 - 5\log_{30} 4 .$$

解答 1. (1) 5 (2) $\frac{4}{3}$ (3) $-\frac{2}{3}$ (4) -1 (5) $-\frac{1}{2}$ 2. (1) 4 (2) -3 (3) 4

【例題 13】

若 $\log_2 6 = a$ ，試以 a 表示 $\log_{18} 36$

解答 $\frac{2a}{2a-1}$

【例題 14】

求下列各式的值：

$$(1) \frac{\log_2 121}{\log_2 11} \quad (2) \log_7 3 \times \log_3 7 \quad (3) \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 4 .$$

解答 (1) 2 (2) 1 (3) 2

【例題 15】

求下列各式的值：

$$(1) \log_4 9 \times \log_3 8 \quad (2) (\log_2 5 + \log_8 25)(\log_5 64 - \log_{25} 8)$$

解答 (1) 3 (2) $\frac{15}{2}$

[練習]

1. 設 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$, 將下列各式用 a, b 表示:

- (1) $\log_3 2$ (2) $\log_2 6$ (3) $\log_5 12$

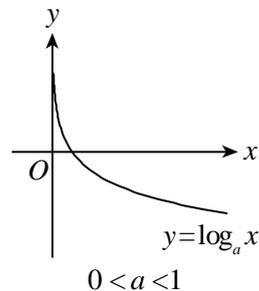
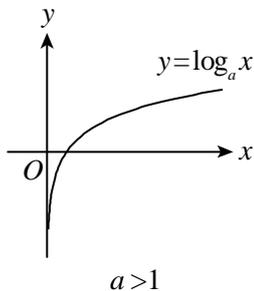
2. 求下列各式的值:

- (1) $\log_{\sqrt{2}} 3 \times \log_3 4$ (2) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 7 \times \log_7 8$

解答 1.(1) $\frac{a}{b}$ (2) $\frac{a+b}{a}$ (3) $\frac{2a+b}{1-a}$ 2.(1)4 (2)3

[對數函數]

1. 設 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, 我們將函數 $y = f(x) = \log_a x$ 稱為以 a 為底數的對數函數。
 2. 設 $a > 0$, $a \neq 1$, 對數函數 $y = \log_a x$ 圖形如下:



3. 對數函數 $y = \log_a x$ 之圖形的特色:

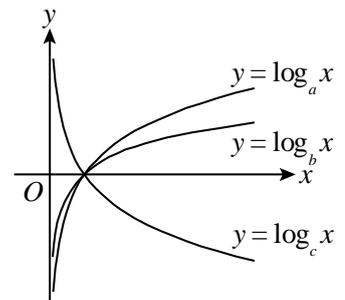
- (1) 圖形都在 y 軸右方. 也就是當 x 是正實數時, $\log_a x$ 才有意義。
 (2) 圖形都通過點 $(1, 0)$. 這是因為 $\log_a 1 = 0$ 。
 (3) 當 $a > 1$ 時, $y = \log_a x$ 為嚴格遞增函數, 即當 $\alpha < \beta$ 時, $\log_a \alpha < \log_a \beta$ 。
 當 $0 < a < 1$ 時, $y = \log_a x$ 為嚴格遞減函數, 即當 $\alpha < \beta$ 時, $\log_a \alpha > \log_a \beta$ 。
 (4) 函數 $y = \log_a x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。

【例題 16】

右圖為函數 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ 的圖形選出正確的選項:

- (1) $a > 1$ (2) $b > 1$ (3) $c > 1$ (4) $a > b$ (5) $b > c$

解答 (1)(2)(5)



【例題 17】

解下列方程式：

(1) $\log_3(x+1)=2$ (2) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 + \log_2 3$

解答 (1) $x=8$ (2) $x=3$

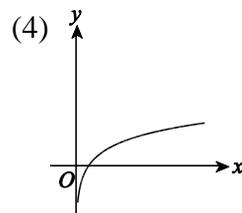
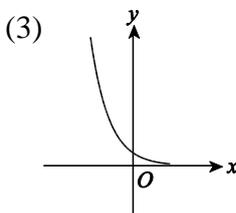
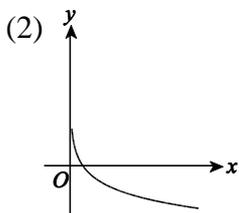
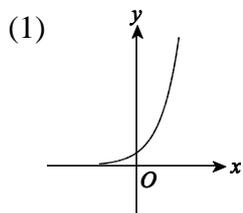
【例題 18】

求滿足下列不等式之 x 值的範圍。

(1) $\log_3(x-2) < 1$ (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x-5) > -1$

解答 (1) $2 < x < 5$ (2) $5 < x < 6$

[練習]

1. 設 $a > 0$, $a \neq 1$, 則下列圖形中, 哪些可能是對數函數 $y = \log_a x$ 的部分圖形:

2. 解下列方程式:

(1) $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) = 1$ (2) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$

3. 求滿足下列不等式之 x 值的範圍:

(1) $-1 < \log_5 x < 2$ (2) $\log_{0.5}(x+1) > \log_{0.25}(x^2 - x - 1)$

解答 1.(2)(4) 2.(1) $x=5$ (2) $x=2$ 3.(1) $\frac{1}{5} < x < 25$ (2) $-1 < x < -\frac{2}{3}$

習 題

1. 利用指數律求下列各式的值：

$$(1) (\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^5 \quad (2) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)^3 \quad (3) (-6)^5 \times \left(\frac{1}{2} \right)^5$$

2. 求下列各式的值：

$$(1) 3^3 \times 3^{-4} \quad (2) (3^6 + 3^2)^0 \quad (3) (\sqrt{3}-1)^{-2} \times (\sqrt{3}+1)^{-2} \quad (4) \frac{(\sqrt{3})^{-2}}{(\sqrt{3})^4}$$

3. 求下列各式的值：

$$(1) 64^{\frac{2}{3}} \quad (2) \left((\sqrt{5})^3 \right)^{-2} \quad (3) (\sqrt{5}-\sqrt{2})^3 (\sqrt{5}+\sqrt{2})^3 \quad (4) \left(\frac{16}{25} \right)^{-0.5} \times \left(\frac{27}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5}$$

4. 解下列方程式：(1) $(\sqrt{8})^{x+1} = 16\sqrt{2}$. (2) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$. (3) $9^{-x} - 2 \cdot 3^{1-x} - 27 = 0$

5. 已知 $a = \sqrt[3]{4}$, $b = \sqrt[4]{8}$, $c = \sqrt{2\sqrt{2}}$, 比較 a, b, c 三數的大小_____

6. 解下列不等式：(1) $\left(\frac{1}{5} \right)^{x^2} < \left(\left(\frac{1}{5} \right)^x \right)^2$. (2) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$

7. 求出下列各式的 x 值：

$$(1) \log_{\sqrt{2}} x = 0 \quad (2) \log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{2} \quad (3) \log_{\sqrt{2}} x = -2 \quad (4) \log_x 49 = 2 (x > 0) \quad (5) 3^x = 7 .$$

8. 求下列各式的值：

$$(1) \log \frac{7}{36} + 2 \log 3 - \log \frac{14}{25} + 5 \log 2 \quad (2) \log_2 \sqrt{\frac{7}{48}} + \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 42 .$$

$$(3) \log_7 64 \times \log_3 7 \times \log_2 3 \quad (4) \left(\log_2 \frac{1}{125} + \log_4 \sqrt[3]{25} \right) \left(\log_5 4 + \log_{25} \sqrt{32} \right)$$

9. 設 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$, 用 a, b 表示出下列各式：(1) $\log_{10} 20$ (2) $\log_{10} 0.6$ (3) $\log_5 12$

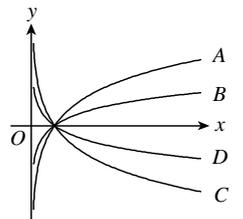
10. 求下列各式的值：

$$(1) \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 9 \quad (2) \left(\log_2 5 + \log_8 \sqrt{125} \right) \left(\log_{25} 4 + \log_5 \frac{1}{8} \right)$$

11. 若 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$, $y = \log_d x$ 的圖形為 A, B, C, D (如圖所示). 試判斷底數 a, b, c, d 的大小關係：

$$(1) a > b > c > d \quad (2) a < b < c < d \quad (3) b > a > c > d \quad (4) b > a > d > c$$

(5) 無法比較 .



12. 解下列各方程式：

$$(1) \log_{10} \frac{x}{2} + \log_{10} 4 = 1 \quad (2) 1 + \log_4(x+1) = \log_2(x-7)$$

13. 解下列不等式：(1) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{4}}(8-x)$ (2) $0 \leq \log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$

14. 已知 $\log 1.23 \approx 0.0899$ ，求出下列各真數 x 的值：

$$(1) \log x = 1.0899 \quad (2) \log x = -0.9101$$

15. (1) 6^{100} 是_____位數

(2) 若將 $\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$ 表示成小數，則從小數點後第_____位開始出現不為 0 的數字

16. 求滿足 $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{100}$ 的最小正整數 $n =$ _____

17. 小華上高中後，父親為他在銀行存入 100 萬元當就學基金，已知銀行的年利率是 4%，以一年為一期複利計算。

(1) 10 年後小華想出國唸書，此時就學基金有多少元？

(2) 經過幾年後此筆存款的本利和會超過 200 萬元？

$$(\log 1.04 \approx 0.0170, \log 1.48 \approx 0.17, \log 2 \approx 0.3010)$$

解答：

$$1.(1)81 \quad (2)\frac{1}{64} \quad (3)-243 \quad 2.(1)\frac{1}{3} \quad (2)1 \quad (3)\frac{1}{4} \quad (4)\frac{1}{27} \quad 3.(1)16 \quad (2)\frac{1}{125} \quad (3)27 \quad (4)90$$

$$4.(1)x=2 \quad (2)x=1 \text{ 或 } x=0 \quad (3)x=-2 \quad 5.a=c < b \quad 6.(1)x > 2 \text{ 或 } x < 0 \quad (2)0 < x < 1$$

$$7.(1)1 \quad (2)\frac{1}{2} \quad (3)\frac{1}{2} \quad (4)7 \quad (5)\log_3 7 \quad 8.(1)2 \quad (2)-\frac{1}{2} \quad (3)6 \quad (4)-\frac{26}{3}$$

$$9.(1)a+1 \quad (2)a+b-1 \quad (3)\frac{2a+b}{1-a} \quad 10.(1)2 \quad (2)-3 \quad 11.(3) \quad 12.(1)x=5 \quad (2)x=15$$

$$13.(1)4 < x < 8 \quad (2)\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \quad 14.(1)x=12.3 \quad (2)x=0.123 \quad 15.(1)78 \text{ 位數} \quad (2) \text{第 8 位}$$

$$16.26 \quad 17.(1)148 \text{ 萬元} \quad (2)18$$