第一章　數與式

[有理數與無理數]

1. 有理數的定義：可以表示成$\dfrac{q}{p}$的數，稱為有理數．其中 p， q 為整數，且 $p \neq 0$

[註] (1) 任意兩有理數加、減、乘、除（0 不能當除數）的結果，仍為有理數

(2) 有理數就是整數、有限小數或循環小數

2. 數線上，不是有理數的數稱為無理數

【例題 1】(有理數)

將下列各數化成小數：(1) $\dfrac{13}{40}$　(2) $\dfrac{15}{11}$

解答　(1) 0.325　(2) $1.\overline{36}$

【例題 2】

將下列各個循環小數化成分數（有理數）：(1) $0.\overline{45}$　(2) $1.0\overline{25}$

解答　(1) $\dfrac{5}{11}$　(2) $\dfrac{203}{198}$

【例題 3】(無理數的化簡)

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$　(2) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$　(3) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

解答　(1) $3\sqrt{3}$　(2) 16　(3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(4) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　(5) 4

【例題 4】

x 、 y 是有理數，若$\left(2+\sqrt{5}\right)x+\left(1-\sqrt{5}\right)y=8-2\sqrt{5}$ ，則$x=$______ ，$y=$______ 。

解答 $(2,4)$

[練習]

1.化簡下列根式：

(1) $\sqrt{5}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (3) $\dfrac{6}{\sqrt{15}-3}+\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}$

2. 若將$\dfrac{6}{7}$化為小數，則小數點後第 9 位數字為多少？

3. 下列哪些有理數可化成有限小數? (1) $\dfrac{23}{8}$ (2) $\dfrac{13}{30}$ (3) $\dfrac{49}{350}$ (4) $\dfrac{1}{27}$ (5) $\dfrac{11}{20}$.

4. 設 a，b 是有理數，且$(3+\sqrt{3})a+6\sqrt{3}\,b=6-4\sqrt{3}$，求數對$(a\,,\,b)=$____________ .

解答 1.(1) 0 (2) $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ (3) 7 2. 7 3. 135 4. $(2\,,-1)$

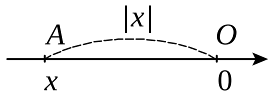
[雙重根號的化簡]

1. 當$a>b>0$時，$\sqrt{\left(a+b\right)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

2. $\sqrt{x^2}=|x|$

3. 數線上所有的點都對應到一個實數，稱作這個點的坐標 .

若A點的坐標為x，我們以$|x|$（讀做「x的絕對值」）來表示A點與原點的距離 . 例如：$|2|=2$，$|-3|=3$. 由於$|x|$表示距離，所以$|x|\geq0$恆成立 .



▲圖 8

【例題 5】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. (2) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$. (3) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$. (4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

解答 (1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (2) $2+\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ (4) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

【例題 6】

已知 $\sqrt{14+2\sqrt{45}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求(1) a (2) b (3) $\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b-1}$ 的值。

解答 (1)5　(2) $\sqrt{5}-2$　(3)4

【例題 7】

已知實數 x， y 滿足 $|x+y|+(2x-y-15)^2=0$，求 x， y 的值

解答 $(5,-5)$

[練習]

1. 設 $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $\frac{1}{b}-\frac{1}{b-6}=$____________ .

2. 已知 a ，b 均為正整數，且 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}=a-\sqrt{b}$ ，求 $a+b$ 的值。

3. 已知 x ，y 為有理數，且 $x+y\sqrt{19+8\sqrt{3}}=x\sqrt{21-12\sqrt{3}}+15\sqrt{3}$ ，求 x ，y 的值。

解答 1. 3　2.7　3.$(-5，5)$

[算幾不等式及乘法公式]

1. 算幾不等式: 若 a， b 為非負的實數，則 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. 其中等號成立的條件是 $a=b$

2. 乘法公式：

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

【例題 8】

(1)已知 a ，b 是正實數，且 $2a+3b=12$ ，求 ab 的最大值及所對應的數對 (a,b) 。

(2)已知 a ，b 是正實數，且 $ab=10$ ，求 $5a+2b$ 的最小值及所對應的數對 (a,b) 。

解答 (1) 最大值為 6，$(a,b)=(3,2)$　(2) 最小值為 20，$(a,b)=(2,5)$ 。

【例題 9】

展開下列各式：

(1) $(2a+3b)^3$　(2) $(2a-b-1)^2$

解答 (1) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$　(2) $4a^2+b^2-4ab-4a+2b+1$

【例題 10】

因式分解下列各式：

(1) x^3+8y^3　(2) x^3-125　(3) $16x^4-1$

解答 (1) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$　(2) $(x-5)(x^2+5x+25)$　(3) $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

[練習]

1. 展開下列各式：

(1) $(2a+3)^2(2a-3)^2$　(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$　(3) $(a-b-1)(a+b+1)$　(4) $(3a-2b)^3$

2. 因式分解下列各式：

(1) $27x^3-y^3$　(2) $(x+y)^4-(x-y)^4$

3. 設 $x>0$，$y>0$，且 $2x+3y=12$，

求(1) xy 之最大值為＿＿＿＿＿．(2)產生最大值時數對$(x,y)=$＿＿＿＿＿＿．

4. (1)已知正實數 a ，b 滿足 $4a^2+b^2=16$ ，求 ab 的最大值。

(2) 已知 $a>0$ ，求 $a+\dfrac{16}{a}$ 的最小值及所對應 a 的值。

解答 1.(1) $16a^4-72a^2+81$　(2) $8a^3+125b^3$　(3) a^2-b^2-2b-1　(4) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$
2.(1) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$　(2) $8xy(x^2+y^2)$　3. (1)6　(2)(3 , 2)　4.(1) 4 (2) 最小值 8，$a=4$

【例題 11】

設 $x>1$，化簡 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}$

解答 $x-\dfrac{1}{x}$

【例題 12】

設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，求下列各式的值：

(1) $x+\dfrac{1}{x}$　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

解答 (1) 8　(2) 62　(3) 488

[練習]

設 $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$， $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，求下列各式的值：

(1) xy .　(2) $x+y$.　(3) x^2+y^2 .　(4) x^3+y^3 .

解答 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\sqrt{7}$　(3) 6　(4) $\dfrac{11\sqrt{7}}{2}$

[分點公式與絕對值公式]

1. 設點 A 與點 B 的坐標分別為 a 與 b， m， n 為正數

   (1) A 與 B 的距離 $\overline{AB}=|a-b|$

   (2) 若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 P 點坐標為 $\dfrac{mb+na}{m+n}$

2. 設 k 是正實數

   (1) 若 $|x|=k$，則 $x=k$ 或 $x=-k$

   (2) 若 $|x|\le k$，則 $-k\le x\le k$

   (3) 若 $|x|\ge k$，則 $x\ge k$ 或 $x\le -k$

3. 設 a， b 為實數，則 $|a+b|\le|a|+|b|$

【例題 13】

數線上兩點 $A(9)$，$B(-6)$．求

(1) $\overline{AB}$ 的長．　　　(2) $\overline{AB}$ 的中點坐標．

(3) 已知 P 點在 A，B 之間，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，求 P 點坐標．

(4) 已知 Q 點為 $\overline{AB}$ 外一點，且 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=5:2$，求 Q 點坐標

解答 (1) 15　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 4　(4) -16

【例題 14】

解下列各式，並在數線上標示其解

(1) $|x-1|=5$　(2) $|3x-1|=5$　(3) $|2x+3|\le 2$　(4) $|x-1|>5$　(5) $5\le|2x-3|<9$

解答 (1) 6 或 -4　(2) 2 或 $-\dfrac{4}{3}$　(3) $-\dfrac{5}{2}\le x\le -\dfrac{1}{2}$　(4) $x<-4$ 或 $x>6$　(5) $-3<x\le -1$ 或 $4\le x<6$

【例題 15】

已知 a ，b 為實數，且不等式 $|x+a|\le b$ 的解為 $-2\le x\le 12$ ，求 a ，b 的值。

解答 $(-5$，$7)$

【例題 16】

設 x 為實數，求 $|x-2|+|x+1|$ 的最小值為何？

解答 3

[練習]

1. 解下列各式：

(1) $|x|=5$.　(2) $|x|>2$.　(3) $|x-1|>2$.　(4) $|2x-2|\le 2$

2. 設 $a<b$，比較下列各數的大小：

$P=\dfrac{a+b}{2}$， $Q=\dfrac{a+3b}{4}$， $R=\dfrac{3a+5b}{8}$.

3. 設 x 為實數，求 $|x-6|+|x+1|$ 的最小值

4. 解方程式 $|x+1|+|x-5|=10$ ，得 $x=$______。

解答 1.(1) $x=5$ 或 -5　(2) $x>2$ 或 $x<-2$　(3) $x>3$ 或 $x<-1$　(4) $0\le x\le 2$

2. $\dfrac{a+b}{2}<\dfrac{3a+5b}{8}<\dfrac{a+3b}{4}$　3. 7　4. 7 或 -3

習　題

1. 下列哪些數是有理數?(1) -5　(2) $\sqrt{12}$　(3) $\sqrt{121}$　(4) $\pi-3$　(5) 0.12

2. 數線上兩點 $A(-4)$，$B(10)$，

 (1) 求 $\overline{AB}$ 的長為____________ .

 (2) 已知 $P(x)$ 點在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$，求 $x=$____________ .

 (3) 已知 $Q(y)$ 點為 $\overline{AB}$ 外一點且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=3:4$，求 $y=$____________ .

3. r、s 為實數且 $r<s$，若 $a=\dfrac{r+3s}{4}$，$b=\dfrac{2r+s}{3}$，$c=\dfrac{5r+s}{6}$，$d=\dfrac{3r+s}{4}$，則 a、b、c、d 之大小順序為____________ .

4. 設 a，b 是有理數，且 $(2-\sqrt{2})a+5\sqrt{2}\,b=4+3\sqrt{2}$，求數對 $(a,b)=$____________

5. 已知 $\sqrt{11}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{b}$ 的值

6. 因式分解下列各式:

 (1) $a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$.　　(2) $8x^3-27$

7. 化簡下列各式：

 (1) $\sqrt{18}$.　　(2) $\sqrt{3}-7\sqrt{5}+\sqrt{12}+\sqrt{20}$　　(3) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

 (4) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$.　　(5) $\dfrac{5}{2-\sqrt{3}}$　　(6) $\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}+\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}$

8.(1) 解不等式 $|2x-3|<5$，得 x 的範圍為____________

 (2) 已知 x 為整數，求滿足 $|2x-3|<10$ 的解共有幾個？______

9. 把 $-2<x<5$ 化成 $|x-a|<b$，求數對 $(a,b)=$____________

10. 設 $a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$，b 為 a 的小數部分，求 $\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{b}=$____________ .

11. 設 a，b 均為正數，且 $2a+b=9$，試求 ab 的最大值，以及此時 a，b 的值

12. 設 $x=\sqrt{2}-1$，求下列各式的值:

 (1) $x+\dfrac{1}{x}$.　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

13. 已知 a，b 為實數，且不等式 $|ax+5|>b$ 的解為 $x<-1$ 或 $x>6$，求 a，b 的值。

14. 請問滿足絕對值不等式 $|4x-12|\le 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

 (1)1　(2)2　(3)3　(4)4　(5)6。　【103 學測】

15. 試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於 3？

 (1) 1 個　(2) 4 個　(3) 6 個　(4) 8 個　(5) 10 個。　【109 學測】

16. 已知$a=\sqrt{7+\sqrt{47}}$，求a在哪兩個連續整數之間？

(1) 0 與 1　(2) 1 與 2　(3) 2 與 3　(4) 3 與 4　(5) 4 與 5。

17. 設a、b為循環小數，$a=0.\overline{12}$、$b=0.\overline{01}$。則$a-b$的值是下列哪一個選項？

(1) 0.11　(2) 0.1111　(3) $\frac{1}{9}$　(4) $\frac{10}{99}$　(5) $\frac{100}{999}$。　【108 指乙】

18. 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項：　【102 指乙】

(1) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=0.\overline{6}+0.\overline{4}$　(2) $0.\overline{72}+0.\overline{28}=1.\overline{1}$　(3) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=1$　(4) $0.\overline{5}+0.\overline{5}=1.\overline{1}$　(5) $0.4\overline{9}=0.5$。

解答：

1.135　2.(1) 14　(2) 2　(3) -46　3. $a>b>d>c$　4. (2 , 1)　5. $-\frac{\sqrt{11}}{2}$　6.(1) $(a-b-1)^2$

(2) $(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)$　7.(1) $3\sqrt{2}$　(2) $3\sqrt{3}-5\sqrt{5}$　(3)3　(4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(5) $10+5\sqrt{3}$　(6) 7

8. (1) $-1<x<4$　(2)10　9. $(\frac{3}{2},\frac{7}{2})$　10. $\frac{5\sqrt{2}+3}{4}$　11. 最大值$\frac{81}{8}$，$a=\frac{9}{4},b=\frac{9}{2}$

12.(1) $2\sqrt{2}$　(2) 6　13. (−2，7)　14.(4)　15.(3)　16.(4)　17.(3)　18.(1)(4)(5)