第十二章　條件機率與貝氏定理

[條件機率]

設 A,B 為樣本空間 S 中的任二事件，且 $P(A)>0$；則在事件 A 發生的情況下，發生事件 B 的條件機率記為 $P(B|A)$，且 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

【註】1. $P(A'|C)=1-P(A|C)$。

2. $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$。

【例題 1】

善化高中高三某班男生 20 人、女生 30 人，男生中戴眼鏡有 12 人，女生中戴眼鏡有 15 人，今自班上任取一名學生，試求

(1)若已知此人是男生，則他戴眼鏡的機率為______

(2)若已知此人戴眼鏡，則他是男生的機率為_______

解答　(1) $\frac{3}{5}$　(2) $\frac{4}{9}$

【例題 2】

若投擲一均勻骰子二次，已知在點數和為 6 點的條件下，試求這二次點數均為偶數的機率為________

解答　$\frac{2}{5}$

[練習]

1.善化高中高三某班學生有 40%會講閩南話，有 25%會講客家話，有 15%閩南、客家話都會講，今自班上任選一人，令 A 表選出會講閩南話者的事件, B 表選出會講客家話者的事件，試求

(1) $P(A'\cap B')=$_____　(2) $P(B|A)=$_____　(3) $P(A'|B)=$______

2. 投擲一骰子兩次，在其點數和大於 8 的條件下，第一次出現 5 點的機率為______

解答　1. (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{3}{8}$　(3) $\frac{2}{5}$　2. $\frac{3}{10}$

[條件機率的乘法原理]

1. 設 A,B 為二事件，若 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$，則 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B)$。
2. 設 A,B,C 為三事件，若 $P(A\cap B)>0$，則 $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)$。

【例題 3】

袋中有 5 白球、3 紅球、4 黑球，今自袋中連續取三球，取出的球不再放回袋子中，試求依序取出白球、紅球、黑球的機率______

解答 $\dfrac{1}{22}$

【例題 4】

已知某公司生產的 10 個產品中有 4 個為不良品，今逐個取出檢查，檢查後不放回，求檢查到第五個時出現第三個不良品的機率為________

解答 $\dfrac{1}{7}$

【例題 5】

袋子裡有 3 顆白球、2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{5}{12}$　(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) $\dfrac{3}{5}$　(5) $\dfrac{2}{3}$

解答 (3)

[練習]

1.袋中有 5 白球、3 紅球、4 黑球，今自袋中連續取三球，取出的球不再放回袋子中，試求依序取出黑球、白球、紅球的機率______

2.有一袋子裝有白球 3 個、紅球 4 個，把球一個一個地取出來，到第五個恰好把白球全部取出的機率為______

3.甲袋有 1 紅球 2 白球，乙袋 1 紅球 1 白球，今自甲袋取 2 球放入乙袋，再自乙袋拿 2 球放入甲袋，求最後 2 紅球都在甲袋的機率為_____

$\boxed{\text{解答}}$ 1. $\dfrac{1}{22}$　2. $\dfrac{6}{35}$　3. $\dfrac{5}{18}$

[獨立事件]

1. 設 A,B 為樣本空間 S 中的兩事件；若滿足 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，稱事件 A,B 為**獨立事件**，否則稱為相關(或相依)事件。

【重要性質】當事件 A、B 為獨立事件，則事件 A'、B 亦為獨立事件，事件 A、B' 亦為獨立事件，事件 A'、B' 亦為獨立事件。

2. 對任意三事件 A,B,C，當下列條件均成立時，則 A,B,C 三事件獨立

1. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$。　2. $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$。
3. $P(C\cap A)=P(C)\cdot P(A)$。　4. $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$。

【例題 6】

已知 A,B,C 為三個獨立事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{2}{5}$，$P(C)=\dfrac{1}{4}$，試求

(1) $P(A\cap B\cap C')=$______　(2) $P(C'\mid A\cup B')=$______　(3) $P\big((A\cap B)\mid C\big)=$______

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\dfrac{1}{10}$　(2) $\dfrac{3}{4}$　(3) $\dfrac{2}{15}$

【例題 7】

阿呆、阿傻、阿笨三人，平常射擊之命中率為 $\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3}$，今有一鳥飛入射程內，三人同時各對它發射一槍(命中率互不影響)，則

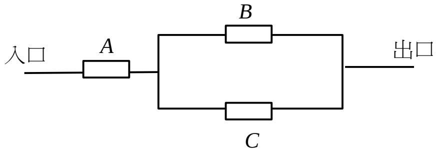
(1)此鳥被命中之機率為________

(2)此鳥恰中一槍之機率為________

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\dfrac{59}{60}$　(2) $\dfrac{3}{20}$

【例題 8】

如右圖，三個元件 A, B, C 安置在線路中，每個元件發生故障都是獨立的，其發生故障的機率分別是 0.3, 0.2, 0.1，求線路由於元件發生故障而中斷的機率為________



解答　0.314

[練習]

1.設 A,B 為獨立事件，$P(A)=0.4$，$P(B')=0.7$，試求

(1) $P(A'\cap B)=$______　(2) $P(A|B')=$______　(3) $P(A'\cup B)=$______

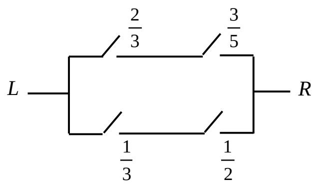
2.阿呆參加基本學力測驗放榜後申請台、清、交三所大學，假設其順利申請上的機率分別為 0.2, 0.4, 0.5，且互不影響，試求下列各小題

(1)阿呆能順利申請上大學的機率為______

(2)阿呆同時申請上三所大學的機率為______

(3)阿呆恰申請上一所大學的機率為______

3.右圖的電路圖中有 4 個開關，電流通過各開關的機率如右圖。若各開關的操作獨立，則電流從左端 L 流到右端 R 的機率為______



解答　1. (1)0.18　(2)0.4　(3)0.72　2. (1)0.76　(2)0.04　(3)0.46　3. $\frac{1}{2}$

[貝式定理]

1. 設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為樣本空間 S 中的 n 個事件，若滿足下列二條件，則稱 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個**分割**。

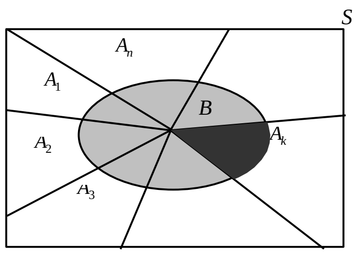
1 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = S$。

2 $A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$。

2. **貝氏定理**：設 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的分割, B 為任一事件；若 $P(B)>0$，則在事件 B 發生的情況下，事件 A_k 發生的機率為 $P(A_k|B)$

$$=\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_k\cap B)}{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)}$$

$$=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i)}$$ 。



【例題 9】

有甲、乙、丙三個袋子，甲袋中有 1 白球 2 黑球 3 紅球，乙袋中有 2 白球 1 黑球 1 紅球，丙袋中有 4 白球 5 黑球 3 紅球。今任取一袋由其中取出二球，已知取得一紅球及一白球，則此二球取自丙袋之機率為＿＿＿＿＿

解答 $\frac{15}{59}$

【例題 10】

某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

(1) 0.25　(2) 0.3　(3) 0.35　(4) 0.4　(5) 0.45

解答 (2)

[練習]

1.甲袋中有 3 藍、5 白球，乙袋中有 4 藍、4 白球，丙袋中有 2 藍、6 白球，今任選一袋任取二球(選袋取球機會均等)

(1)求取得二白球之機率為＿＿＿＿

(2)已知取得二白球，求取自甲袋的機率為＿＿＿＿

2.根據過去紀錄知，某電腦工廠檢驗其產品的過程中，將良品檢驗為不良品的機率為 0.20，將不良品檢驗為良品的機率為 0.16。又知該產品中，不良品佔 5%，良品佔 95%。若已知一件產品被檢驗為良品，但該產品實際上為不良品之機率為＿＿＿＿(取到小數點後第二位)

解答 1. (1) $\frac{31}{84}$　(2) $\frac{10}{31}$　2.　0.01

[客觀機率與主觀機率]

1. 客觀機率 ： 是以過往類似事件出現的頻率或多次重複試驗後，一事件出現的頻率來表示該事件發生的機率。

2. 主觀機率 ： 主觀機率是以觀察者對一事件的相信程度來定義機率。

由於主觀機率是以觀察者主觀來決定機率，因此並無一定的對錯。例如：小明覺得今年比賽湖人隊奪冠的機率是 80%，然而小華覺得是 70%，此兩個機率值以主觀機率的觀點來看都是適當的。

雖然主觀上評估事件發生的機率不一定有絕對的標準，但仍需滿足機率性質。

【例題 11】

小宏每天上學途中，總共會遇到五個紅綠燈裝置，假設該月總共上課 20 天，小宏記錄該月在上學途中會遇到紅燈的次數如下表：

紅燈次數	0	1	2	3	4	5
天數	1	2	5	6	4	2

依據上表，請計算下列兩事件的機率：

(1) 小宏明天上學遇到 2 次紅燈。　(2) 小宏明天上學遇到 3 次以上紅燈。

解答 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{5}$ 。

【例題 12】

設小明進行射擊練習 100 次，得分與次數統計如下表：

分數	0	1	2	3	4	5
次數	25	25	20	15	10	5

依據上表，若今再射擊一次，則分數至少 1 分的機率為何？

解答 $\frac{3}{4}$ 。

【例題 13】

(1)小明評估今年湖人隊奪冠的機率是 120%，是否適當？

(2)小明評估今年湖人隊打入 NBA 決賽的機率是 50%，奪得 NBA 冠軍的機率是 80%，上述主觀機率的評估是否適當？

解答 (1)否　(2)否。

[練習]

1. 下表為某季 NBA 比賽各隊罰球數與罰球進球數之資料，試依此資料配合計算機，推測下列哪一隊的進球機率最高？

隊伍	馬刺	暴龍	勇士	騎士	灰狼
罰球數	1720	1803	1672	1694	1995
罰球進球數	1408	1449	1339	1342	1570

2. 小明記錄自己某月 30 天每天練投 10 球三分球進球數的次數如下表：

進球數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天數	2	3	1	3	1	3	5	6	2	3	1

依據上表，則下次練投至少進 2 球的機率為何？

3. 試判斷下列各主觀機率的值是否適當，並說明原因。

(1) 今年 NBA 決賽由湖人隊與勇士隊爭奪冠軍，小明覺得湖人隊奪冠的機率是 70%，而勇士隊奪冠的機率則是 40%。

(2) 今年 NBA 決賽由湖人隊與勇士隊爭奪冠軍，小明覺得湖人隊奪冠的機率是 70%，而小華覺得勇士隊奪冠的機率是 40%。

(3) 從六個字母的單字抽出一個字，最後三個字是 ing 的機率是 0.6，第五個字母是 n 的機率是 0.5。

解答　1. 馬刺隊　2. $\frac{5}{6}$　3.(1)否　(2)是　(3)否

習　題

1. 一袋中有 5 個紅球、3 個白球，今阿呆先從袋中取一球後不放回，阿傻再從袋中取一球，令 A 表阿呆抽到紅球的事件, B 表阿傻抽到紅球的事件，則 $P(A|B)=$_______

2. 不透明袋中有 3 白 3 紅共 6 個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。甲、乙、丙、丁、戊 5 人依甲第一、乙第二、⋯　⋯、戊第五的次序，從袋中各取一球，取後不放回。試問在甲、乙取出不同色球的條件下，戊取得紅球的機率為________

3. 甲袋有紅球 1 個，白球 5 個，乙袋有白球 4 個，今自甲袋取一球至乙袋，再由乙袋取一球放入甲袋，求紅球在甲袋之機率為________

4. 擲三枚相同且均勻的銅板一次。則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率為________

5. 有甲乙二袋，甲袋有大小相同的白球 3 個、紅球 5 個，乙袋有大小相同的白球 4 個、黑球 8 個，現在從這二個袋子各取 2 球，試求恰有 2 白球的機率為________

6. 某人上班有甲、乙兩條路線可供選擇。早上定時從家裡出發，走甲路線有 $\frac{1}{10}$ 的機率會遲到，走乙路線有 $\frac{1}{5}$ 的機率會遲到。無論走哪一條路線，只要不遲到，下次就走同一路線，否則就換另一條路線。假設他第一天走甲路線，則第三天也走甲路線的機率為_________

7. 某一社團有 100 個成員，分別是高三有 20 人，內有女生 x 人；高二有 40 人，內有女生 8 人；高一有 40 人，內有女生 4 人。已知從當中任選 1 人，選出為女生的機率為 0.17，試求 $x=$____

8. 甲袋中有紅球 3 個，白球 a 個，乙袋中有紅球 2 個，白球 3 個，今任選一袋取出一球為白球，若此白球來自甲袋之機率為 $\frac{7}{13}$，求 $a=$ _______

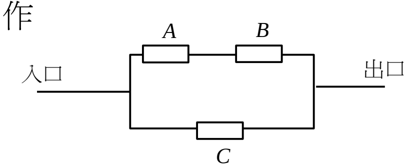
9. 某公司有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知，第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$，其中 $k=1, 2,3,4,5,6$，為了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若為不良品，則此不良品是來自第五個工廠的機率為 _______

10. 撲克牌有 52 張，不小心遺失 1 張，由剩下的 51 張中任取 2 張，試問
(1) 2 張皆為黑桃的機率為______
(2) 若 2 張皆為黑桃時，問遺失的那 1 張不是黑桃的機率為________

11. 甲袋子中有 3 個白球、2 個黑球；乙袋子中有 1 個白球、3 個黑球；今從這兩個袋子中分別摸出 1 個球，假設每一個球被摸出的機會均等，試問這兩個球同顏色的機率為________

12. 甲班依次與乙班、丙班、丁班進行三場拔河比賽，如果甲班贏乙班、丙班、丁班的機率依次為 0.4、0.5、0.7，則三場比賽甲班恰好贏一場的機率是________

13. 設在右圖的電路系統中，每個單元(即 A,B,C)都是獨立運作的，而且每個單元正常運作的機率依次分別為 $\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{7}{10}$，則此系統正常運作的機率為_________



14. 有兩組供機器運作的配件 A、B，其單獨發生故障的機率分別為 0.1, 0.15。只有當 A,B 都發生故障時，此機器才無法運作。A、B 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，但若後面故障則不會影響前面的故障情形：若用並列方式，則故障情形互不影響。若考慮以下三種情形：
(一)將 B 串接於 A 之後
(二)將 A 串接於 B 之後
(三)將 A,B 獨立並列
在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為 p_1、p_2、p_3。
請選出正確的選項。
(1) $p_1>p_2>p_3$　(2) $p_2>p_1>p_3$　(3) $p_3>p_2>p_1$　(4) $p_3>p_1>p_2$　(5) $p_1=p_2>p_3$

15. 甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A、B、C、D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A、B、C、D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。
(1) A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
(2) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
(3) A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率

(4) B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率

(5) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

16. 一份試卷共有10題單選題，每題有5個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？

(1)10^{-5}　(2)10^{-6}　(3)10^{-7}　(4)10^{-8}　(5)10^{-9}

17. 某地區衛生機構成功訪問了500人，其中年齡為50-59歲及60歲(含)以上者分別有220名及280名。這500名受訪者中，120名曾做過大腸癌篩檢，其中有75名是在一年之前做的，有45名是在一年之內做的。已知受訪者中，60歲(含)以上者曾做過大腸癌篩檢比率是50-59歲者曾做過大腸癌篩檢比率的3.5倍。試選出正確的選項。

(1) 受訪者中年齡為60歲(含)以上者超過60%

(2) 由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在50-59歲間的機率大於0.25

(3) 由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一年之前受檢的機率為 $2\cdot(\frac{45}{120})\cdot(\frac{75}{119})$

(4) 這500名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率低於75%

(5) 受訪者中60歲(含)以上者，曾做過大腸癌篩檢的人數超過90名

18. 下列敘述中關於主觀機率的值，哪些是適當的？

(1) 小明以往數學小考沒有一次超過 60 分，他覺得自己這次期中考數學及格的機率是 90%

(2) 小華以往數學小考每次都超過 90 分，他覺得自己這次期中考數學超過 90 分的機率是 120%

(3) 從全班同學中抽選一位同學，該生本次期中考數學及格的機率是 0.5，數學滿分的機率是 0.6

(4) 從全班同學中抽選一位同學，該生本次期中考數學及格的機率是 0.7，數學不及格的機率是 0.4

(5) 從全班同學中抽選一位同學，該生本次期中考數學及格的機率是 0.7，國文及格的機率是 0.4

解答

1. $\frac{4}{7}$　2. $\frac{1}{2}$　3. $\frac{13}{15}$　4. $\frac{3}{7}$　5. $\frac{26}{77}$　6. $\frac{83}{100}$　7. 5　8. 7　9. $\frac{5}{21}$　10.(1) $\frac{1}{17}$　(2) $\frac{39}{50}$

11. $\frac{9}{20}$　12. 0.36　13. $\frac{79}{100}$　14.(2)　15.(4)(5)　16.(3)　17.(3)(5)　18.(1)(5)